

Partie II – Graphes (non) orientés

Graphes et Algorithmes – GRAAL

Gaëtan Staquet
gaetan.staquet@ec-nantes.fr

École Centrale de Nantes – LS2N
S508

Janvier à mars 2026

1. Graphes, multigraphes et isomorphisme
2. Un petit détour par de la complexité
3. Prédécesseurs, successeurs et degrés
4. Chemins, fermeture transitive et circuits
5. Structures de données

Graphe non orienté

Définition II.1 (Graphe non orienté). Un **graphe non orienté** est une paire $\mathcal{G} = (V, E)$ où

- ▶ V est un ensemble de **sommets** ;
- ▶ $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ est un ensemble d'**arêtes**.

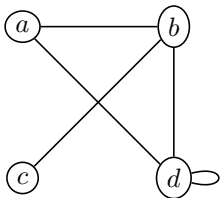


Figure II.1 – Un graphe non orienté.

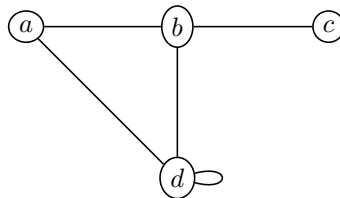


Figure II.2 – Le même graphe non orienté.

Un graphe non orienté permet de représenter des **relations binaires symétriques**.

Graphe orienté

Définition II.2 (Graphe orienté). Un **graphe orienté** est une paire $\mathcal{G} = (V, E)$ où

- ▶ V est un ensemble de **sommets** ;
- ▶ $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ est un ensemble d'**arcs**.

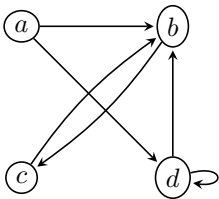


Figure II.3 – Un graphe orienté.

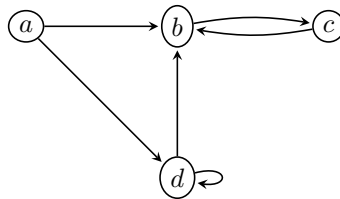


Figure II.4 – Le même graphe orienté.

Un graphe orienté permet de représenter **n'importe quelle relation binaire**.

Graphe orienté

Définition II.2 (Graphe orienté). Un **graphe orienté** est une paire $\mathcal{G} = (V, E)$ où

- ▶ V est un ensemble de **sommets** ;
- ▶ $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ est un ensemble d'**arcs**.

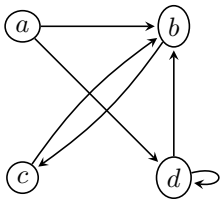


Figure II.3 – Un graphe orienté.

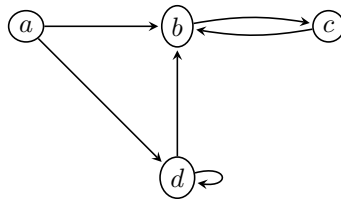


Figure II.4 – Le même graphe orienté.

Un graphe orienté permet de représenter **n'importe quelle relation binaire**.

Exercice II.3. Soit un graphe orienté $\mathcal{G} = (V, E)$. Prouvez que $|E| \leq |V|^2$.

Un graphe non orienté est un graphe orienté

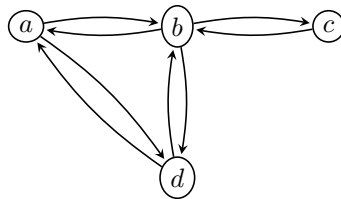
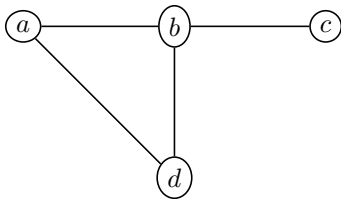


Figure II.5 – Passer d'un graphe non orienté à un graphe orienté.

Un graphe non orienté est un graphe orienté

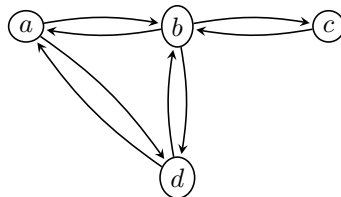
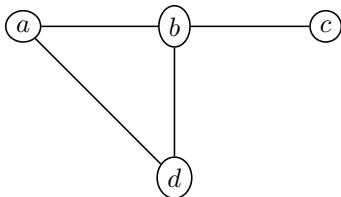


Figure II.5 – Passer d'un graphe non orienté à un graphe orienté.

Définition II.4 (Non orienté vers orienté). Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe non orienté. Le graphe orienté qui décrit la même structure est $\mathcal{G}' = (V', E')$ avec

- ▶ $V' = V$;
- ▶ $E' = \{(u, v) \in V \times V \mid \{u, v\} \in E\}$.

Dans l'autre sens ?

Question 11.5. Étant donné un graphe orienté, est-ce qu'on peut construire un graphe non orienté avec le **même nombre de sommets** et qui représente la **même relation** ?

Dans l'autre sens ?

Question 11.5. Étant donné un graphe orienté, est-ce qu'on peut construire un graphe non orienté avec le **même nombre de sommets** et qui représente la **même relation** ?

Non : les graphes non orientés représentent des relations binaires symétriques, les graphes orientés des relations binaires quelconques.

Dans l'autre sens ?

Question 11.5. Étant donné un graphe orienté, est-ce qu'on peut construire un graphe non orienté avec le **même nombre de sommets** et qui représente la **même relation** ?

Non : les graphes non orientés représentent des relations binaires symétriques, les graphes orientés des relations binaires quelconques.

↔ Les graphes orientés sont plus « génériques » que les non orientés. Par la suite, on va surtout se concentrer sur les **graphes orientés**.

Sous-graphe

Définition II.6 (Sous-graphe). Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. Un **sous-graphe** de \mathcal{G} est un graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ avec

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E$ et
- ▶ pour tout $(u, v) \in E'$, on a $u \in V'$ et $v \in V'$.

Sous-graphe

Définition II.6 (Sous-graphe). Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. Un **sous-graphe** de \mathcal{G} est un graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ avec

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E$ et
- ▶ ~~pour tout $(u, v) \in E'$, on a $u \in V'$ et $v \in V'$.~~

Sous-graphe

Définition II.6 (Sous-graphe). Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. Un **sous-graphe** de \mathcal{G} est un graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ avec

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E$ et
- ▶ pour tout $(u, v) \in E'$, on a $u \in V'$ et $v \in V'$.

Le sous-graphe **induit** par $V' \subseteq V$ est le sous-graphe $\mathcal{G} = (V', E')$ avec

$$E' = \{(u, v) \in E \mid u \in V' \wedge v \in V'\}.$$

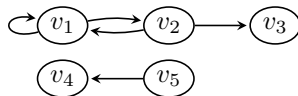


Figure II.6 – Un graphe \mathcal{G} .

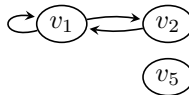


Figure II.7 – Le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_5\}$.

Sous-graphe

Définition II.6 (Sous-graphe). Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. Un **sous-graphe** de \mathcal{G} est un graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ avec

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E$ et
- ▶ pour tout $(u, v) \in E'$, on a $u \in V'$ et $v \in V'$.

Le sous-graphe **induit** par $V' \subseteq V$ est le sous-graphe $\mathcal{G} = (V', E')$ avec

$$E' = \{(u, v) \in E \mid u \in V' \wedge v \in V'\}.$$

Un sous-graphe $\mathcal{G}' = (V', E')$ est dit **couvrant** si $V' = V$.

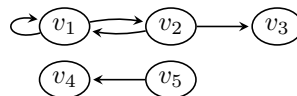


Figure II.6 – Un graphe \mathcal{G} .

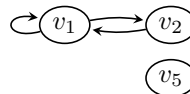


Figure II.7 – Le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_5\}$.

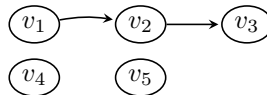


Figure II.8 – Un graphe couvrant.

Question II.7. Prenons un graphe \mathcal{G} . Est-ce que \mathcal{G} est un sous-graphe de lui-même ?

Multigraphes

Parfois, les relations $V \times V$ ne suffisent pas.

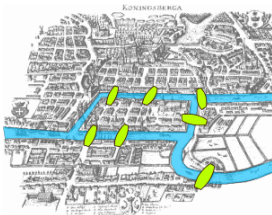


Figure II.9 – Les 7 ponts de la ville de Königsberg.¹

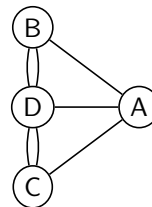


Figure II.10 – Un **multigraphe** qui modélise la situation.

1. https://en.wikipedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png CC-BY-SA 3.0

Multigraphes

Définition II.8 (Multigraphe orienté). Un **multigraphe orienté** est une paire $\mathcal{G} = (V, E)$ où

- ▶ V est un ensemble de sommets ;
- ▶ $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ est un **multiensemble**² d'arcs.

La plupart des algorithmes qu'on va voir pour les graphes peuvent être adaptés aux multigraphes.

2. Un multiensemble est un ensemble qui peut contenir des doublons.

Isomorphisme

Définition II.9 (Isomorphisme). Soient $\mathcal{G} = (V, E)$ et $\mathcal{G}' = (V', E')$ deux graphes (orientés). Un **isomorphisme** de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' est une bijection $\phi : V \rightarrow V'$ telle que

- ▶ pour tout $(u, v) \in E$, on a $(\phi(u), \phi(v)) \in E'$;
- ▶ pour tout $(u, v) \in E'$, on a $(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \in E$.

On dit que \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' .

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est une bijection si f est injective et surjective, c'est-à-dire,

- injection** si pour toute paire d'éléments x_1, x_2 du domaine de f telle que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$; et
- surjection** si pour tout élément de y , il existe un x dans le domaine de f tel que $f(x) = y$.

Isomorphisme

Définition II.9 (Isomorphisme). Soient $\mathcal{G} = (V, E)$ et $\mathcal{G}' = (V', E')$ deux graphes (orientés). Un **isomorphisme** de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' est une bijection $\phi : V \rightarrow V'$ telle que

- ▶ pour tout $(u, v) \in E$, on a $(\phi(u), \phi(v)) \in E'$;
- ▶ pour tout $(u, v) \in E'$, on a $(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \in E$.

On dit que \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' .

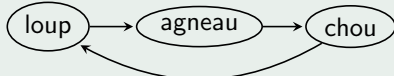
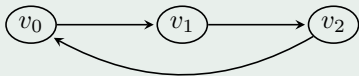
Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est une bijection si f est injective et surjective, c'est-à-dire,

- injection** si pour toute paire d'éléments x_1, x_2 du domaine de f telle que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$; et
- surjection** si pour tout élément de y , il existe un x dans le domaine de f tel que $f(x) = y$.

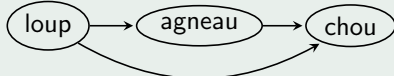
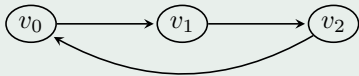
Les deux graphes ont la même **structure**. Les noms des sommets n'ont pas d'importance.

Isomorphisme – Exercices

Exercice II.10. Est-ce que les deux graphes suivants sont isomorphes? Si oui, donnez un isomorphisme qui le prouve. Si non, argumentez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.



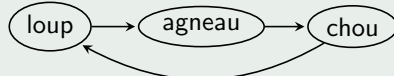
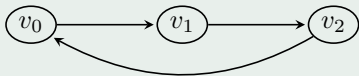
Exercice II.11. Est-ce que les deux graphes suivants sont isomorphes? Si oui, donnez un isomorphisme qui le prouve. Si non, argumentez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.



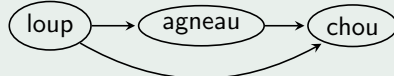
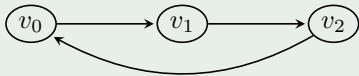
Exercice II.12. Trouvez un algorithme qui décide si deux graphes finis sont isomorphes et dont la complexité est polynomiale en le nombre de sommets et d'arcs des deux graphes.

Isomorphisme – Exercices

Exercice II.10. Est-ce que les deux graphes suivants sont isomorphes? Si oui, donnez un isomorphisme qui le prouve. Si non, argumentez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.



Exercice II.11. Est-ce que les deux graphes suivants sont isomorphes? Si oui, donnez un isomorphisme qui le prouve. Si non, argumentez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.



Exercice II.12. Trouvez un algorithme qui décide si deux graphes finis sont isomorphes et dont la complexité est polynomiale en le nombre de sommets et d'arcs des deux graphes. Si vous y arrivez, contactez-moi 😊.

1. Graphes, multigraphes et isomorphisme
2. Un petit détour par de la complexité
3. Prédécesseurs, successeurs et degrés
4. Chemins, fermeture transitive et circuits
5. Structures de données

Problèmes de décision

Définition II.13 (Problème de décision). Un **problème de décision** est un problème algorithmique qui peut être exprimé comme une question dont la réponse est oui ou non.

Quelques exemples :

- ▶ Étant donné deux nombres x et y , est-ce que $x \bmod y = 0$?
- ▶ Est-ce qu'il existe une séquence d'arcs qui part d'un sommet v et qui arrive dans un sommet u ?
- ▶ Étant donné une formule de logique propositionnelle sur les variables x_1, \dots, x_n , existe-t-il une assignation des variables qui rend la formule vraie ?

Si la réponse est positive, on veut aussi un **témoin**³ : quelque chose qui nous permet de vérifier que la réponse est bien positive.

On appelle **solution** soit la réponse « non », soit la réponse « oui » avec un témoin.

3. Ou certificat.

Une introduction à P et NP

Définition II.14 (P). La classe de complexité **P** est l'ensemble des problèmes de décision dont une solution peut être **calculée** en temps polynomial en la taille des entrées.

Définition II.15 (NP). La classe de complexité **NP** est l'ensemble des problèmes de décision dont une solution peut être **vérifiée** en temps polynomial en la taille des entrées.

Question II.16. Est-ce $P = NP$?

Une introduction à P et NP

Définition II.14 (P). La classe de complexité **P** est l'ensemble des problèmes de décision dont une solution peut être **calculée** en temps polynomial en la taille des entrées.

Définition II.15 (NP). La classe de complexité **NP** est l'ensemble des problèmes de décision dont une solution peut être **vérifiée** en temps polynomial en la taille des entrées.

Question II.16. Est-ce $P = NP$?

On sait que $P \subseteq NP$. L'autre sens est inconnu.

Certains problèmes dans NP sont plus « compliqués » que d'autres : les problèmes **NP-complets**. Une définition (approximative) en quelques mots : on peut transformer une instance de n'importe quel problème dans NP en une instance d'un problème NP-complet en temps polynomial.

Si on trouve un algorithme polynomial pour un problème NP-complet, alors $P = NP$.

Cliques

Définition II.17 (Clique). Soit \mathcal{G} un graphe non orienté. Une **clique** est un sous-graphe (V, E) de \mathcal{G} tel que

$$\forall v, v' \in V : v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E.$$

Soit un naturel $k > 0$. Le **problème de l'existence d'une clique** est le problème de décision « pour un naturel $k > 0$, est-ce que \mathcal{G} a une clique de taille k ? »

Lemme II.18. Le problème de la clique maximale est NP-complet.

Exemple d'application : en chimie, pour trouver des produits chimiques qui ont une certaine structure.

Anticliques

Définition II.19 (Anticlique). Soit \mathcal{G} un graphe non orienté. Une **anticlique** est un sous-graphe (V, E) de \mathcal{G} tel que

$$\forall v, v' \in V : v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \notin E.$$

Le **problème de l'existence d'une anticlique** est le problème de décision « pour un naturel $k > 0$, est-ce que \mathcal{G} a une anticlique de taille k ? »

Lemme II.20. Le problème de la clique maximale est NP-complet.

Ce problème est complémentaire au problème de l'existence d'une clique. Cependant, il y a des familles de graphes pour lesquelles chercher une solution à un problème est plus efficace que l'autre.

Ensembles dominants

Définition II.21 (Ensemble dominant). Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe non orienté. Un **ensemble dominant** est un sous-ensemble D de V tel que

$$\forall v \in V \setminus D, \exists v' \in D : \{v, v'\} \in E.$$

Le **problème de l'ensemble dominant** est le problème de décision « pour un naturel $k > 0$, est-ce que \mathcal{G} possède un ensemble dominant d'au plus k sommets ? »

Lemme II.22. Le problème de l'ensemble dominant est NP-complet.

Exemple d'application : trouver un chemin efficace dans des réseaux mobiles décentralisés (ad-hoc).

Problème de l'isomorphisme de graphes

Définition II.23 (Problème de l'isomorphisme de graphes). Le **problème de l'isomorphisme de graphes** est le problème de décision « pour deux graphes finis \mathcal{G} et \mathcal{H} , est-ce que \mathcal{G} et \mathcal{H} sont isomorphes ? »

Ce qu'on sait :

- ▶ Le problème est dans NP.
- ▶ Pour plusieurs classes de graphes (e.g., arbres, graphes planaires), le problème a une solution en temps polynomial.

On ne sait pas si le problème est NP-dur, ni s'il existe un algorithme polynomial pour le cas général.

Définition II.24 (Problème de l'isomorphisme de sous-graphes). **problème de l'isomorphisme de sous-graphes** est le problème de décision « pour deux graphes finis \mathcal{G} et \mathcal{H} , existe-t-il un sous-graphe de \mathcal{G} qui est isomorphe à \mathcal{H} ? »

Lemme II.25. Le problème de l'isomorphisme de sous-graphes est NP-complet.

1. Graphes, multigraphes et isomorphisme
2. Un petit détour par de la complexité
3. Prédécesseurs, successeurs et degrés
4. Chemins, fermeture transitive et circuits
5. Structures de données

Prédécesseur et successeur

Définition 11.26 (Prédécesseur et successeur). Soient un graphe orienté $\mathcal{G} = (V, E)$ et deux sommets u et v . On dit que

- ▶ u est un **prédécesseur** de v s'il existe un arc $(u, v) \in E$;
- ▶ v est un **successeur** de u s'il existe un arc $(u, v) \in E$;
- ▶ u et v sont **adjacents** si l'un est successeur de l'autre.

Prédécesseur et successeur

Définition 11.26 (Prédécesseur et successeur). Soient un graphe orienté $\mathcal{G} = (V, E)$ et deux sommets u et v . On dit que

- ▶ u est un **prédécesseur** de v s'il existe un arc $(u, v) \in E$;
- ▶ v est un **successeur** de u s'il existe un arc $(u, v) \in E$;
- ▶ u et v sont **adjacents** si l'un est successeur de l'autre.



- ▶ v_0 est prédécesseur de v_1 et successeur de v_2 .
- ▶ v_1 n'a pas de successeur.
- ▶ v_2 n'a pas de prédécesseur.

Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

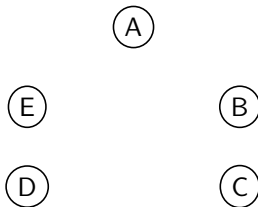
Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

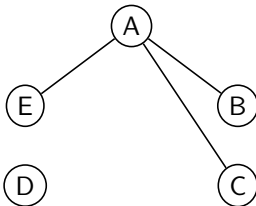


Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

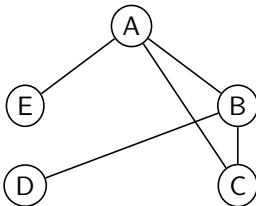


Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

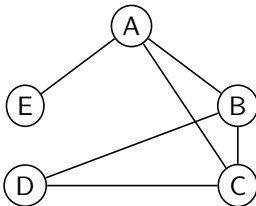


Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

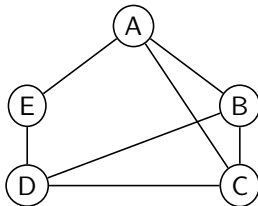


Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.

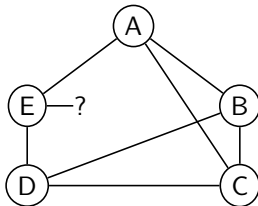


Bonjour

On a un groupe de cinq personnes qui se serrent la main ou se font la bise pour se dire bonjour. Chaque individu serre la main d'un autre et fait la bise aux trois autres.

Question II.27. Est-ce que cette situation est possible ?

Construisons un graphe (non orienté) pour nous aider, en définissant une arête entre deux sommets si les deux se font la bise.



Degrés entrant et sortant

Définition II.28 (Degrés entrant et sortant). Soient un graphe orienté $\mathcal{G} = (V, E)$ et un sommet u .

- ▶ Le **degré sortant** de u est le nombre d'arcs dont u est le sommet de départ :

$$\delta^{\rightarrow}(u) = |\{v \in V \mid (u, v) \in E\}|.$$

- ▶ Le **degré entrant** de u est le nombre d'arcs dont u est le sommet d'arrivée :

$${}^{\rightarrow}\delta(u) = |\{v \in V \mid (v, u) \in E\}|.$$

Degrés – Propriétés

Proposition II.29. Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. On a

$$\sum_{v \in V} \delta^{\rightarrow}(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} {}^{\rightarrow}\delta(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} (\delta^{\rightarrow}(v) + {}^{\rightarrow}\delta(v)) = 2|E|.$$

Degrés – Propriétés

Proposition II.29. Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. On a

$$\sum_{v \in V} \delta^{\rightarrow}(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} {}^{\rightarrow}\delta(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} (\delta^{\rightarrow}(v) + {}^{\rightarrow}\delta(v)) = 2|E|.$$

Corollaire II.30. Dans un graphe **non orienté**, le nombre de sommets dont le degré sortant (ou entrant) est impair est pair.

Degrés – Propriétés

Proposition II.29. Soit un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$. On a

$$\sum_{v \in V} \delta^{\rightarrow}(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} {}^{\rightarrow}\delta(v) = |E|$$

$$\sum_{v \in V} (\delta^{\rightarrow}(v) + {}^{\rightarrow}\delta(v)) = 2|E|.$$

Corollaire II.30. Dans un graphe **non orienté**, le nombre de sommets dont le degré sortant (ou entrant) est impair est pair.

Sur l'exemple précédent, on aurait 5 sommets de degré sortant 3. Un graphe ne peut donc pas être construit.

1. Graphes, multigraphes et isomorphisme
2. Un petit détour par de la complexité
3. Prédécesseurs, successeurs et degrés
4. Chemins, fermeture transitive et circuits
 1. Chemins
 2. Fermeture transitive
 3. Circuits
 4. Chemins et circuits eulériens
 5. Chemins et circuits hamiltoniens
5. Structures de données

Existe-t-il un chemin ?



Figure II.11 – Source : <https://naolib.fr>

Y a-t-il un chemin depuis l'École Centrale jusqu'à la gare ?

Quels sont tous les endroits qu'on peut atteindre en partant de l'École Centrale (avec des correspondances) ?

Chemin

Définition II.31 (Chemin). Un **chemin**⁴ d'un graphe orienté $\mathcal{G} = (V, E)$ est une suite (v_1, \dots, v_n) où

- ▶ n est un naturel,
- ▶ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \in V$, et
- ▶ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Un chemin est dit **simple** si les arcs empruntés sont deux à deux distinctes, *i.e.*, si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\} : i \neq j \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}).$$

Un chemin est dit **élémentaire** si ses sommets sont deux à deux distincts, *i.e.*, si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j.$$

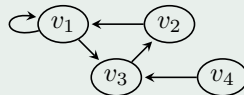
La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs empruntés, *i.e.*, $n-1$.

4. Pour un graphe non orienté, on parle plutôt de **chaîne**.

Exercices

Exercice II.32.

1. Existe-t-il un chemin qui part de v_1 et qui finit en v_2 ?
2. Existe-t-il un chemin qui part de v_1 et qui finit en v_1 ?
3. Existe-t-il un chemin qui part de v_4 et qui finit en v_4 ?
4. Existe-t-il un chemin qui part de v_1 et qui finit en v_4 ?
5. Dessinez un graphe \mathcal{G}' qui représente la relation « pour deux sommets u, v de \mathcal{G} , il existe un chemin de u vers v dans \mathcal{G} ».



Exercice II.33. Prouvez que n'importe quel chemin élémentaire est simple.

Exercice II.34. Prouvez que si deux sommets sont reliés par un chemin, alors ils sont reliés par un chemin élémentaire.

Exercice II.35. Prouvez que la longueur de n'importe quel chemin élémentaire est bornée par le nombre de sommets du graphe.

Fermeture transitive

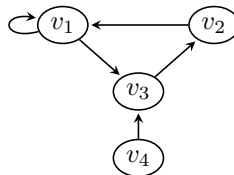
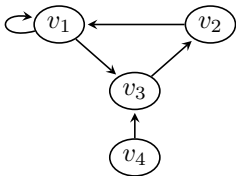
Définition II.36 (Fermeture transitive). La **fermeture transitive** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le graphe $\mathcal{G}' = (V, E')$ tel que, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ si et seulement si il existe un chemin qui part de u et qui finit en v dans \mathcal{G} .

Remarque II.37. Pour tout sommet u , on a nécessairement $(u, u) \in E'$.

Fermeture transitive

Définition II.36 (Fermeture transitive). La **fermeture transitive** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le graphe $\mathcal{G}' = (V, E')$ tel que, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ si et seulement si il existe un chemin qui part de u et qui finit en v dans \mathcal{G} .

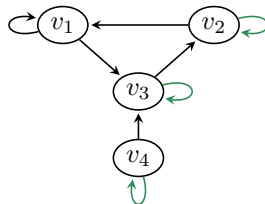
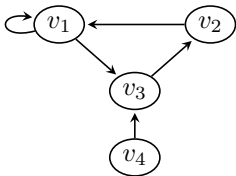
Remarque II.37. Pour tout sommet u , on a nécessairement $(u, u) \in E'$.



Fermeture transitive

Définition II.36 (Fermeture transitive). La **fermeture transitive** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le graphe $\mathcal{G}' = (V, E')$ tel que, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ si et seulement si il existe un chemin qui part de u et qui finit en v dans \mathcal{G} .

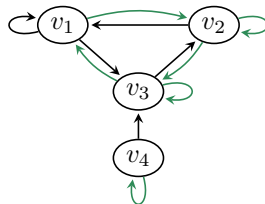
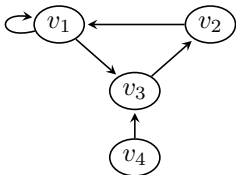
Remarque II.37. Pour tout sommet u , on a nécessairement $(u, u) \in E'$.



Fermeture transitive

Définition II.36 (Fermeture transitive). La **fermeture transitive** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le graphe $\mathcal{G}' = (V, E')$ tel que, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ si et seulement si il existe un chemin qui part de u et qui finit en v dans \mathcal{G} .

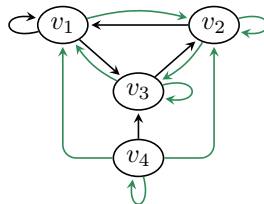
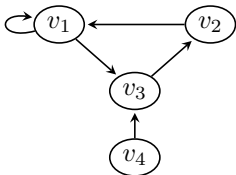
Remarque II.37. Pour tout sommet u , on a nécessairement $(u, u) \in E'$.



Fermeture transitive

Définition II.36 (Fermeture transitive). La **fermeture transitive** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le graphe $\mathcal{G}' = (V, E')$ tel que, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ si et seulement si il existe un chemin qui part de u et qui finit en v dans \mathcal{G} .

Remarque II.37. Pour tout sommet u , on a nécessairement $(u, u) \in E'$.



Exercices

Exercice II.38. Sur le marché, on constate que

- ▶ une pomme coûte moins cher qu'une poire ;
- ▶ une banane coûte moins cher qu'un kiwi ;
- ▶ une banane coûte moins cher qu'une pomme ;
- ▶ un kiwi coûte moins cher qu'une pomme.

Dessinez un graphe qui représente cette situation, ainsi que sa fermeture transitive. Est-ce qu'une banane coûte moins cher qu'une poire ? Est-ce que la fermeture transitive a du sens, vis-à-vis de la relation représentée ?

Exercice II.39. Prenons le jeu « pierre-papier-ciseaux ». Dessinez le graphe pour la relation « le coup a l'emporte sur le coup b », ainsi que sa fermeture transitive \mathcal{G}' .

Dans \mathcal{G}' , que signifie les arcs ? Est-ce que la fermeture transitive est cohérente par rapport à la relation initiale ?

Circuit

Définition II.40 (Circuit). Un **circuit**⁵ d'un graphe orienté \mathcal{G} est un chemin (v_1, \dots, v_n) de longueur ≥ 1 et tel que $v_1 = v_n$.

Un circuit est **simple** (resp., **élémentaire**) si le chemin est simple (resp., élémentaire).

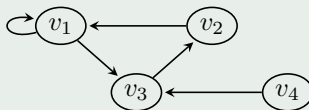
La **longueur** d'un circuit est la longueur du chemin.

Définition II.41 (Acyclique). Un graphe est dit **acyclique** s'il ne contient **aucun circuit** (ou cycle dans le cas non orienté).

5. Pour un graphe non orienté, on parle plutôt de **cycle**.

Exercices

Exercice II.42. Prenons à nouveau le graphe \mathcal{G} suivant :



1. Existe-t-il un circuit qui commence en v_1 ?
2. Existe-t-il un circuit qui commence en v_2 ?
3. Existe-t-il un circuit qui commence en v_4 ?

Exercice II.43. Prouvez que, si on a un circuit (v_1, \dots, v_n) , alors on a un circuit (v_2, \dots, v_n, v_2) .

Chemin et circuit eulérien

Définition II.44 (Chemin eulérien). Soit \mathcal{G} un graphe orienté. Un chemin (v_1, \dots, v_n) est dit **eulérien** s'il passe exactement une fois par chaque **arc** de \mathcal{G} .

Si $n \geq 1$ et $v_1 = v_n$, on a alors un **circuit eulérien**.

Remarque II.45. Un chemin (ou circuit) eulérien est donc **simple**.

Chemin et circuit eulérien

Définition II.44 (Chemin eulérien). Soit \mathcal{G} un graphe orienté. Un chemin (v_1, \dots, v_n) est dit **eulérien** s'il passe exactement une fois par chaque **arc** de \mathcal{G} .

Si $n \geq 1$ et $v_1 = v_n$, on a alors un **circuit eulérien**.

Remarque II.45. Un chemin (ou circuit) eulérien est donc **simple**.

Exercice II.46. Donnez un algorithme qui détermine si un graphe **non orienté** possède un cycle eulérien.

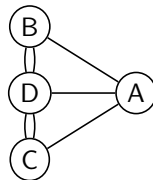
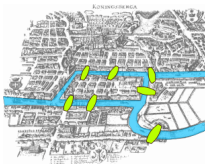


Figure II.12 – Les 7 ponts de la ville de Königsberg.⁶

Pour les graphes non orientés

Pour n'importe quel graphe \mathcal{G} , on dit que \mathcal{G} est **connexe**⁷ si pour toute paire de sommets u, v , il existe une chaîne de u à v .

Lemme II.47. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe **non orienté** connexe avec $|E| \geq 1$. Si \mathcal{G} a un cycle eulérien, alors, pour tout sommet v , $\delta^{\rightarrow}(v)$ est pair.

Démonstration. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un cycle eulérien de \mathcal{G} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on entre et on sort de v_i . Autrement dit, chaque sommet du graphe est vu un nombre pair de fois. Comme on a un cycle eulérien, on visite chaque arête de E : on n'oublie pas d'arêtes. Donc, pour tout sommet v , $\delta^{\rightarrow}(v)$ est pair. □

7. On reviendra sur les notions de connexité plus tard.

Pour les graphes non orientés

Lemme II.48. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe **non orienté** connexe avec $|E| \geq 1$. Si, pour tout sommet v , $\delta^{\rightarrow}(v)$ est pair, alors \mathcal{G} a un cycle eulérien.

Démonstration. Soient $u \in V$ et (v_1, \dots, v_n) un cycle avec $v_1 = v_n = u$. Un tel cycle existe nécessairement, vu que chaque sommet a un degré (sortant) pair et \mathcal{G} est connexe.

Soit $\mathcal{G}' = (V, E')$ le sous-graphe couvrant de \mathcal{G} tel que E' contient uniquement les arêtes de \mathcal{G} qui ne sont pas utilisées dans le cycle (v_1, \dots, v_n) .

Dans \mathcal{G}' , chaque sommet a un degré sortant qui est pair. Bien que \mathcal{G}' ne soit pas nécessairement connexe, on peut le découper en sous-graphes connexes. Soit $u' \in V$ tel que $\delta^{\rightarrow}(u') > 0$ dans \mathcal{G}' et u' apparaît dans (v_1, \dots, v_n) .

On prend un cycle (v'_1, \dots, v'_m) dans un sous-graphe connexe de \mathcal{G}' avec $v'_1 = v'_m = u'$. On peut alors allonger le cycle dans \mathcal{G} pour obtenir $(v_1, \dots, v_i, u', v'_1, \dots, v'_m, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

On recommence ce principe jusqu'à avoir épuisé toutes les arêtes de \mathcal{G} . □

Pour les graphes non orientés – conclusion

Théorème II.49. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe **non orienté** connexe avec $|E| \geq 1$. Alors, \mathcal{G} a un **cycle eulérien** si et seulement si, pour tout sommet v , $\delta^{\rightarrow}(v)$ est pair.

Pour les graphes non orientés – chaîne

Corollaire II.50. Un graphe **non orienté** connexe $\mathcal{G} = (V, E)$ a une **chaîne eulérienne** si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est ≤ 2 .

Démonstration. Posons $D = |\{v \in V \mid \delta^{\rightarrow}(v) \text{ est impair}\}|$. Par le Corollaire II.30, D doit être pair, vu que \mathcal{G} est non orienté.

\Rightarrow . Supposons que \mathcal{G} a une chaîne eulérienne (v_1, \dots, v_n) . Si la chaîne est un cycle, on peut appliquer le Théorème II.49 et conclure que $D = 0$. Supposons que la chaîne n'est pas un cycle. Pour chaque $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on entre et on sort de v_i . En revanche, on sort un nombre impair de fois de v_1 et on entre un nombre impair de fois dans v_n . Autrement dit, seules les extrémités de la chaîne peuvent avoir un degré impair. Donc, $D \leq 2$.

À suivre...



Corollaire II.51. Un graphe **non orienté** connexe $\mathcal{G} = (V, E)$ a une **chaîne eulérienne** si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est ≤ 2 .

Démonstration. \Leftarrow . Supposons que $D \leq 2$.

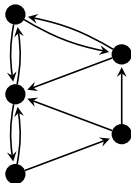
- ▶ Si $D = 0$, on peut appliquer le Théorème II.49 pour obtenir un circuit eulérien (qui est donc une chaîne eulérienne).
- ▶ Si $D = 2$, notons x et y les deux sommets de degré impair. On crée un graphe $\mathcal{G}' = (V, E \cup \{\{x, y\}\})$. Dans \mathcal{G}' , tous les sommets ont un degré pair. Par le Théorème II.49, on obtient un cycle eulérien. Sans perte de généralité, on peut supposer que ce cycle est (x, y, v_1, \dots, v_n) ou (y, x, v_1, \dots, v_n) .
On supprime l'arête $\{x, y\}$ du cycle pour obtenir une chaîne eulérienne dans \mathcal{G} . □

Pour les graphes orientés

Exercice II.52. Soit \mathcal{G} un graphe **orienté** tel que, pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin de u à v . Est-il vrai que si chaque sommet de \mathcal{G} a un nombre pair de successeurs, alors \mathcal{G} a un circuit eulérien ?

Pour les graphes orientés

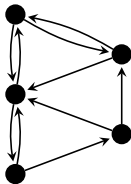
Exercice II.52. Soit \mathcal{G} un graphe **orienté** tel que, pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin de u à v . Est-il vrai que si chaque sommet de \mathcal{G} a un nombre pair de successeurs, alors \mathcal{G} a un circuit eulérien ?



Réponse : non.

Pour les graphes orientés

Exercice II.52. Soit \mathcal{G} un graphe **orienté** tel que, pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin de u à v . Est-il vrai que si chaque sommet de \mathcal{G} a un nombre pair de successeurs, alors \mathcal{G} a un circuit eulérien ?



Réponse : non.

Lemme II.53. Soit \mathcal{G} un graphe **orienté** tel que, pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin de u à v . Alors, \mathcal{G} a un circuit eulérien si et seulement si, pour tout sommet v , $\rightarrow\delta(v) = \delta^{\rightarrow}(v)$.

Chemin et circuit hamiltonien

Définition II.54 (Chemin hamiltonien). Soit \mathcal{G} un graphe orienté. Un chemin (v_1, \dots, v_n) est dit **hamiltonien** s'il passe exactement une fois par chaque **sommet** de \mathcal{G} .

Un circuit (v_1, \dots, v_n, v_1) est dit **hamiltonien** si le chemin (v_1, \dots, v_n) est hamiltonien.

Remarque II.55. Un chemin (circuit) hamiltonien est donc **élémentaire**.

Chemin et circuit hamiltonien

Définition II.54 (Chemin hamiltonien). Soit \mathcal{G} un graphe orienté. Un chemin (v_1, \dots, v_n) est dit **hamiltonien** s'il passe exactement une fois par chaque **sommet** de \mathcal{G} .

Un circuit (v_1, \dots, v_n, v_1) est dit **hamiltonien** si le chemin (v_1, \dots, v_n) est hamiltonien.

Remarque II.55. Un chemin (circuit) hamiltonien est donc **élémentaire**.

Historiquement, Hamilton a inventé le « jeu icosién » en 1856 : trouver un cycle le long des arêtes d'un dodécaèdre. Son but était d'étudier les symétries des dodécaèdres (12 faces) et des icosaèdres (20 faces).

Bien avant lui, le problème du cavalier a été décrit en Inde par le poète Rudrata au IX^e siècle. Une solution existait déjà dans la littérature du monde arabe par al-Adli ar-Rumi vers 840.

Pour les graphes non orientés

Supposons ici que n'importe quel graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est tel que, pour tout sommet v , (v, v) (ou $\{v, v\}$) n'apparaît pas dans E . Autrement dit, on n'a pas de boucles dans le graphe.

Théorème II.56 (Ore). Un graphe non orienté $\mathcal{G} = (V, E)$ avec $|V| \geq 3$ a un cycle hamiltonien si, pour n'importe quelle paire de sommets u et v distincts et **non adjacents**, $\delta^{\rightarrow}(u) + \delta^{\rightarrow}(v) \geq |V|$.

Il existe une condition nécessaire et suffisante (Bondy et Chvátal), mais elle ne sera pas vue dans ce cours.

Pour les graphes orientés

Théorème II.57 (Meyniel). Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe **orienté** tel que, pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin de u à v . Alors, \mathcal{G} a un circuit hamiltonien si, pour n'importe quelle paire de sommets u et v distincts et **non adjacents**,

$$\overset{\rightarrow}{\delta}(u) + \delta^{\rightarrow}(u) + \overset{\rightarrow}{\delta}(v) + \delta^{\rightarrow}(v) \geq 2|V| - 1.$$

À ma connaissance, aucune condition nécessaire et suffisante est connue pour les graphes orientés.

1. Graphes, multigraphes et isomorphisme
2. Un petit détour par de la complexité
3. Prédécesseurs, successeurs et degrés
4. Chemins, fermeture transitive et circuits
5. Structures de données
 1. Matrices d'adjacence
 2. Listes de successeurs

Représentation machine

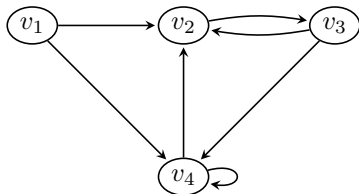
Question II.58. Comment représenter un graphe **fini** dans un ordinateur ?

On peut supposer que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. En effet, on peut toujours construire un isomorphisme depuis un graphe **fini** à n sommets vers un graphe dont les sommets sont V .

Matrice d'adjacence

Définition II.59 (Matrice d'adjacence). Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe orienté, avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Une **matrice d'adjacence** M est une matrice de taille $n \times n$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



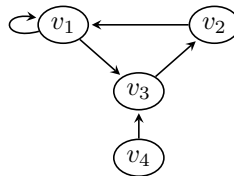
$$\begin{array}{c} v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice d'adjacence – Complexité

Catégorie	Complexité
Espace mémoire	$\mathcal{O}(V ^2)$
Ajouter un arc	$\mathcal{O}(1)$
Supprimer un arc	$\mathcal{O}(1)$
Ajouter un sommet	$\mathcal{O}(V ^2)$
Supprimer un sommet	$\mathcal{O}(V ^2)$
Est-ce que v_i est successeur de v_j ?	$\mathcal{O}(1)$
Est-ce que v_i et v_j sont adjacents ?	$\mathcal{O}(1)$

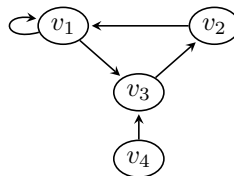
Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive.



Matrice et fermeture transitive

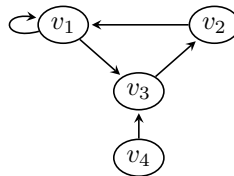
On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive.



$$\begin{array}{c} \text{Chemins de} \\ \text{longueur 0} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Chemins de} \\ \text{longueur 1} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Chemins de} \\ \text{longueur } \leq 1 \\ \hline \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice et fermeture transitive

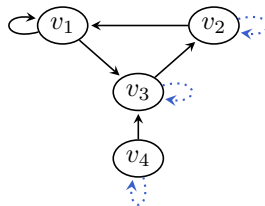
On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le $+$ comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



$$\begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur 0} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur 1} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur } \leq 1 \\
 \hline
 \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Matrice et fermeture transitive

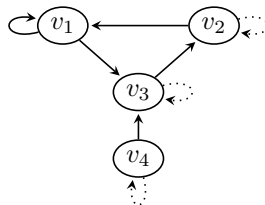
On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



$$\begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur 0} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur 1} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{Chemins de} \\
 \text{longueur } \leq 1 \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne : $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



Chemins de
longueur ≤ 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+

Chemins de
longueur 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

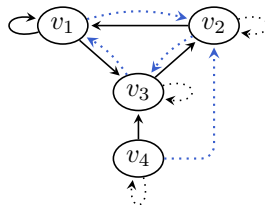
=

Chemins de
longueur ≤ 2

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



Chemins de
longueur ≤ 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+

Chemins de
longueur 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

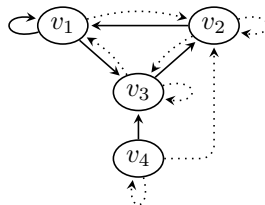
=

Chemins de
longueur ≤ 2

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



Chemins de
longueur ≤ 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+

Chemins de
longueur 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

×

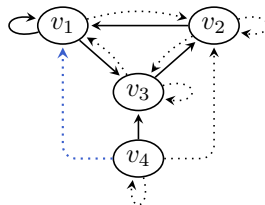
=

Chemins de
longueur ≤ 3

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



Chemins de
longueur ≤ 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+

Chemins de
longueur 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

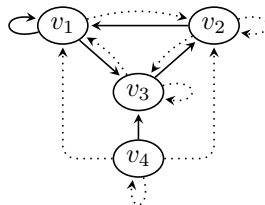
=

Chemins de
longueur ≤ 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \textcolor{blue}{1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice et fermeture transitive

On peut exploiter les opérations matricielles pour calculer la fermeture transitive. On traite le + comme dans l'algèbre booléenne :
 $0 + 0 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$.



Chemins de
longueur ≤ 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+

Chemins de
longueur 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

=

Chemins de
longueur ≤ 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice et fermeture transitive

De manière générale, avec M une matrice d'adjacence de rang n et \mathbb{I} la matrice identité de rang n :

$$\begin{aligned}\mathbb{I} + M + M^2 + \cdots + M^\ell &= \text{chemins de longueur } \leq \ell \\ \mathbb{I} + M + M^2 + \cdots &= \text{fermeture transitive.}\end{aligned}$$

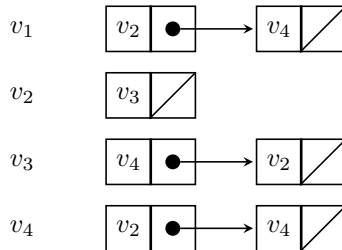
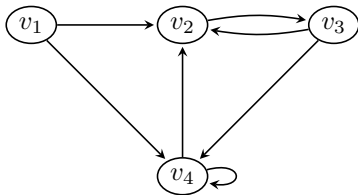
Exercice II.60. Justifiez que le calcul de la fermeture transitive est un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\ell > 0$ tel que

$$\mathbb{I} + M + M^2 + \cdots + M^\ell = \mathbb{I} + M + M^2 + \cdots + M^\ell + M^{\ell+1}.$$

Il est possible de calculer la fermeture transitive via la matrice complémentaire (la transposée de la comatrice) de $\mathbb{I} - M$. Cette approche est en-dehors du cadre du cours.

Listes de successeurs

Définition II.61. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe orienté. On associe à chaque sommet v de \mathcal{G} une **liste de successeurs**, c'est-à-dire une liste qui contient les successeurs de v .



Liste de successeurs – Complexité

Exercice II.62. Remplissez le tableau suivant.

Catégorie	Complexité
Espace mémoire	
Ajouter un arc	
Supprimer un arc	
Ajouter un sommet	
Supprimer un sommet	
Est-ce que v_i est successeur de v_j ?	
Est-ce que v_i et v_j sont adjacents ?	

Remarque II.63. On suppose qu'on trouve la liste correspondante au sommet v en $\mathcal{O}(1)$.

Liste de successeurs – Complexité

Exercice II.62. Remplissez le tableau suivant.

Catégorie	Complexité
Espace mémoire	$\mathcal{O}(V + E)$
Ajouter un arc	$\mathcal{O}(1)$ avec potentiellement des doublons $\mathcal{O}(E)$ sans doublons
Supprimer un arc	$\mathcal{O}(E)$
Ajouter un sommet	$\mathcal{O}(1)$
Supprimer un sommet	$\mathcal{O}(E)$
Est-ce que v_i est successeur de v_j ?	$\mathcal{O}(E)$
Est-ce que v_i et v_j sont adjacents ?	$\mathcal{O}(E)$

Remarque II.63. On suppose qu'on trouve la liste correspondante au sommet v en $\mathcal{O}(1)$.

Comparaisons

Catégorie	Matrice	Liste
Espace mémoire	$\mathcal{O}(V ^2)$	$\mathcal{O}(V + E)$
Ajouter un arc	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(E)$
Supprimer un arc	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(E)$
Ajouter un sommet	$\mathcal{O}(V ^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Supprimer un sommet	$\mathcal{O}(V ^2)$	$\mathcal{O}(E)$
Est-ce que v_i est successeur de v_j ?	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(E)$
Est-ce que v_i et v_j sont adjacents ?	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(E)$

Autres représentations

On peut imaginer d'autres représentations :

- ▶ Listes de prédécesseurs.
- ▶ Avoir une liste avec les sommets et une liste avec tous les arcs.
- ▶ Une approche orientée objet.
- ▶ Et bien d'autres.

Il n'y a pas une approche magique qui est plus efficace que les autres dans tous les cas. La meilleure représentation dépend du problème à résoudre.