

Partie VI – Jeux sur graphes

Graphes et Algorithmes – GRAAL

Gaëtan Staquet
gaetan.staquet@ec-nantes.fr

École Centrale de Nantes – LS2N
S508

Janvier à mars 2026

1. Introduction à la théorie des jeux
2. Jeux d'accessibilité

La théorie des jeux en quelques mots

- ▶ La théorie des jeux s'inscrit dans le cadre des **méthodes formelles**.
- ▶ Les jeux servent à modéliser le comportement d'un système dans son environnement.
- ▶ Le système doit atteindre un **objectif** (pour satisfaire une propriété). L'environnement est **antagoniste** et joue **parfaitement**.
- ▶ Par exemple, pour un véhicule autonome :
 - ▶ Objectif : atteindre l'arrivée, en évitant les accidents et en respectant le code de la route.
 - ▶ L'environnement va tout faire pour l'en empêcher (des accidents, des travaux, des bouchons, etc.).

Dans ce cours

Pour ce cours, on va faire quelques hypothèses :

- ▶ Les jeux seront joués sur des graphes.
- ▶ Le jeu se conclut après un nombre **fini** de coups...
- ▶ Et soit le système gagne, soit l'environnement gagne.
- ▶ Deux joueurs : Ève (système), Adam (environnement).

On va rester à haut niveau.

1. Introduction à la théorie des jeux
2. Jeux d'accessibilité
 1. Définitions
 2. Jeu de Nim
 3. Attracteur
 4. Stratégie depuis l'attracteur
 5. Complexité

Définition VI.1 (Arène). Une **arène** est un tuple $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$ où

- ▶ (V, E) est un graphe **fini orienté** tel que, pour tout $v \in V$, $\delta^{\rightarrow}(v) \geq 1$;
- ▶ V_E et V_A forment une partition de V , i.e., $V_E \cup V_A = V$ et $V_E \cap V_A = \emptyset$;
 - ▶ Si un sommet v appartient à V_E , Eve choisira où aller en sortant de v . Visuellement, les sommets de V_E sont des ronds.
 - ▶ Si un sommet v appartient à V_A , Adam choisira où aller en sortant de v . Visuellement, les sommets de V_A sont des rectangles.

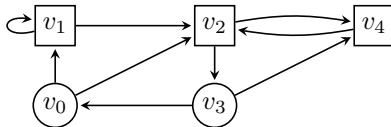


Figure VI.1 – Une arène, avec $V_E = \{v_0, v_3\}$ et $V_A = \{v_1, v_2, v_4\}$.

Jeu d'accessibilité

Définition VI.2 (Jeu d'accessibilité). Un **jeu d'accessibilité** est un tuple $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$ où

- ▶ $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$ est une arène ;
- ▶ $T_E \subseteq V$ est un ensemble de sommets **cibles** pour Ève.

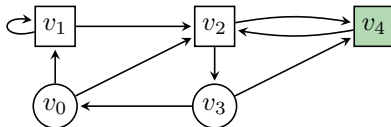


Figure VI.2 – Un jeu d'accessibilité avec $T_E = \{v_4\}$.

Jeu d'accessibilité

Définition VI.2 (Jeu d'accessibilité). Un **jeu d'accessibilité** est un tuple $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$ où

- ▶ $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$ est une arène ;
- ▶ $T_E \subseteq V$ est un ensemble de sommets **cibles** pour Ève.

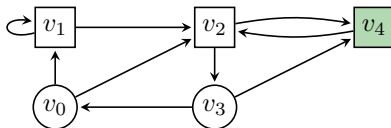


Figure VI.2 – Un jeu d'accessibilité avec $T_E = \{v_4\}$.

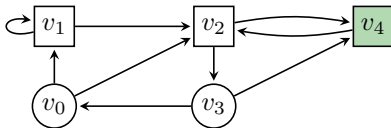
Question VI.3. Est-ce qu'Ève peut faire des choix qui garantissent d'atteindre un sommet de T_E ? Est-ce qu'Adam peut l'en empêcher ?

Partie

Définition VI.4 (Partie). Soit $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$ un jeu d'accessibilité, avec $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$. Une **partie** $\pi = (v_1, v_2, \dots)$ est un chemin infini dans l'arène, i.e., pour tout $i \geq 1$, on a $(v_i, v_{i+1}) \in E$. On note $\text{Occ}(\pi)$ l'ensemble des **sommets visités** le long de π , i.e.,

$$\text{Occ}(\pi) = \{v_i \mid \exists i \geq 1\}.$$

Une partie π est dite **gagnante pour Ève** si au moins un sommet de T_E est visité le long de π , i.e., si $\text{Occ}(\pi) \cap T_E \neq \emptyset$. Elle est **gagnante pour Adam** si on ne voit jamais un sommet de T_E , i.e., si $\text{Occ}(\pi) \cap T_E = \emptyset$.



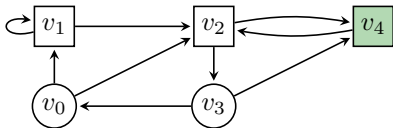
- ▶ $(v_1, v_2, v_3, v_0, v_1, v_2, v_3, v_0, \dots)$ est une partie qui n'est pas gagnante.
- ▶ $(v_0, v_2, v_4, v_2, v_4, \dots)$ est une partie qui est gagnante.

Partie

Définition VI.4 (Partie). Soit $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$ un jeu d'accessibilité, avec $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$. Une **partie** $\pi = (v_1, v_2, \dots)$ est un chemin infini dans l'arène, i.e., pour tout $i \geq 1$, on a $(v_i, v_{i+1}) \in E$. On note $\text{Occ}(\pi)$ l'ensemble des **sommets visités** le long de π , i.e.,

$$\text{Occ}(\pi) = \{v_i \mid \exists i \geq 1\}.$$

Une partie π est dite **gagnante pour Ève** si au moins un sommet de T_E est visité le long de π , i.e., si $\text{Occ}(\pi) \cap T_E \neq \emptyset$. Elle est **gagnante pour Adam** si on ne voit jamais un sommet de T_E , i.e., si $\text{Occ}(\pi) \cap T_E = \emptyset$.



- ▶ $(v_1, v_2, v_3, v_0, v_1, v_2, v_3, v_0, \dots)$ est une partie qui n'est pas gagnante.
- ▶ $(v_0, v_2, v_4, v_2, v_4, \dots)$ est une partie qui est gagnante.

Question VI.5. Comment est-ce qu'Ève peut forcer une partie gagnante ?

Stratégies

Définition VI.6 (Stratégies). Une **stratégie pour Ève** est une fonction $\sigma_E : V_E \rightarrow V$ telle que

$$\forall v \in V_E, u \in V : \sigma_E(v) = u \Rightarrow (v, u) \in E.$$

Une **stratégie pour Adam** est une fonction $\sigma_A : V_A \rightarrow V$ telle que

$$\forall v \in V_A, u \in V : \sigma_A(v) = u \Rightarrow (v, u) \in E.$$

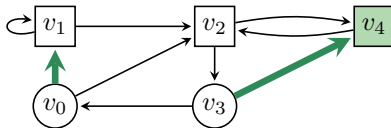


Figure VI.3 – Une stratégie pour Ève est mise en évidence.

Stratégies

Définition VI.6 (Stratégies). Une **stratégie pour Ève** est une fonction $\sigma_E : V_E \rightarrow V$ telle que

$$\forall v \in V_E, u \in V : \sigma_E(v) = u \Rightarrow (v, u) \in E.$$

Une **stratégie pour Adam** est une fonction $\sigma_A : V_A \rightarrow V$ telle que

$$\forall v \in V_A, u \in V : \sigma_A(v) = u \Rightarrow (v, u) \in E.$$

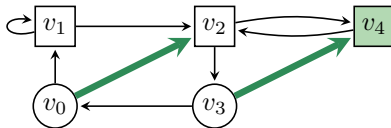
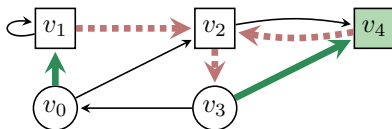


Figure VI.3 – Une stratégie pour Ève est mise en évidence.

Issue

Définition VI.7 (Issue). Soit σ_E et σ_A des stratégies pour Ève et Adam. L'**issue** de la paire (σ_E, σ_A) depuis un sommet v est la partie $\pi_{(\sigma_E, \sigma_A)} = (v_1, v_2, \dots)$ telle que $v_1 = v$ et

$$\forall i \geq 1 : v_{i+1} = \begin{cases} \sigma_E(v_i) & \text{if } v_i \in V_E \\ \sigma_A(v_i) & \text{if } v_i \in V_A. \end{cases}$$

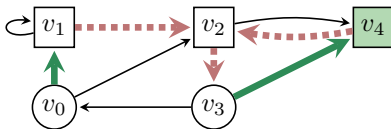


Depuis v_0 , l'issue de la paire de stratégies est $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_3, v_4, v_2, \dots)$.

Issue

Définition VI.7 (Issue). Soit σ_E et σ_A des stratégies pour Ève et Adam. L'**issue** de la paire (σ_E, σ_A) depuis un sommet v est la partie $\pi_{(\sigma_E, \sigma_A)} = (v_1, v_2, \dots)$ telle que $v_1 = v$ et

$$\forall i \geq 1 : v_{i+1} = \begin{cases} \sigma_E(v_i) & \text{if } v_i \in V_E \\ \sigma_A(v_i) & \text{if } v_i \in V_A. \end{cases}$$



Depuis v_0 , l'issue de la paire de stratégies est $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_3, v_4, v_2, \dots)$.

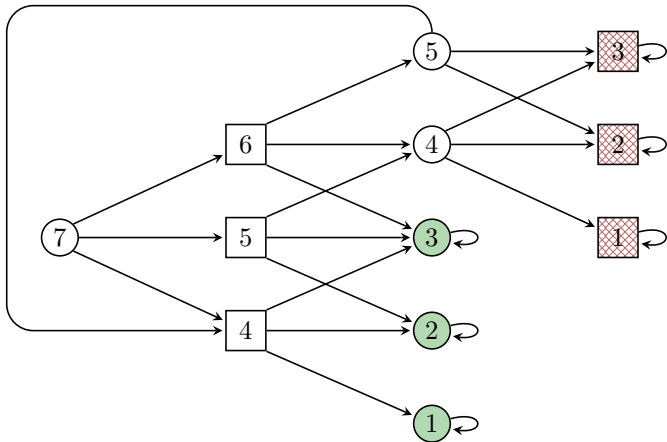
Exercice VI.8. Avec σ_E et σ_A les stratégies données dans la figure ci-dessus, est-ce que la partie $\pi_{(\sigma_E, \sigma_A)}$ depuis v_0 est gagnante ? Et si $\sigma_A(v_1) = v_1$?

Exercice VI.9. Existe-t-il une stratégie σ_E pour Ève telle que, pour n'importe quelle stratégie σ_A , la partie $\pi_{(\sigma_E, \sigma_A)}$ depuis v_0 est gagnante ?

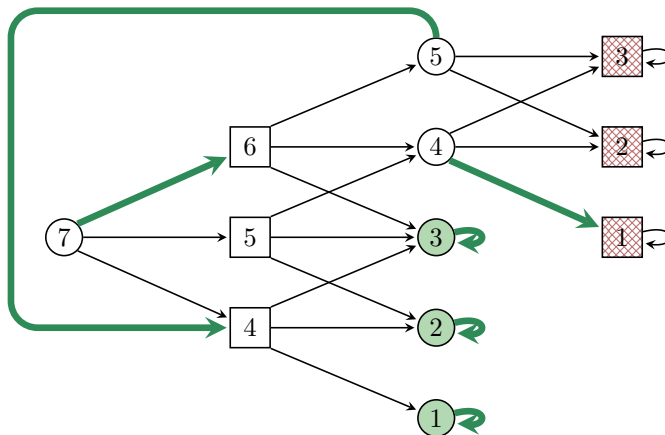
Jeu de Nim

- ▶ On a n bâtons devant nous.
- ▶ À tour de rôle, chaque joueur retire 1, 2 ou 3 bâtons.
- ▶ Le joueur à prendre le dernier bâton gagne.
 - ▶ S'il nous reste 1, 2 ou 3 bâtons, on sait qu'on a gagné.
- ▶ J1 commence.

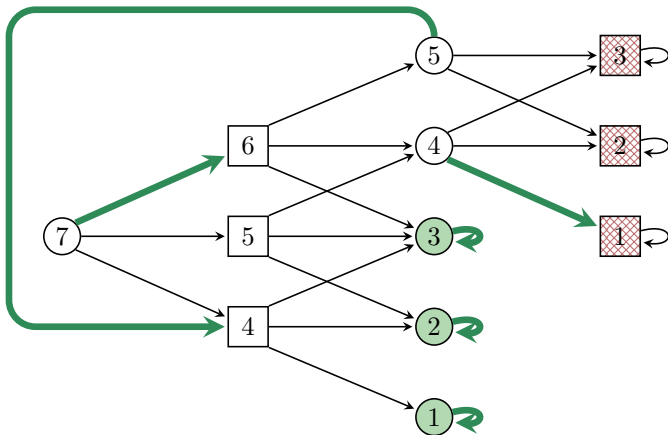
Jeu de Nim avec 7 bâtons



Jeu de Nim – Stratégie

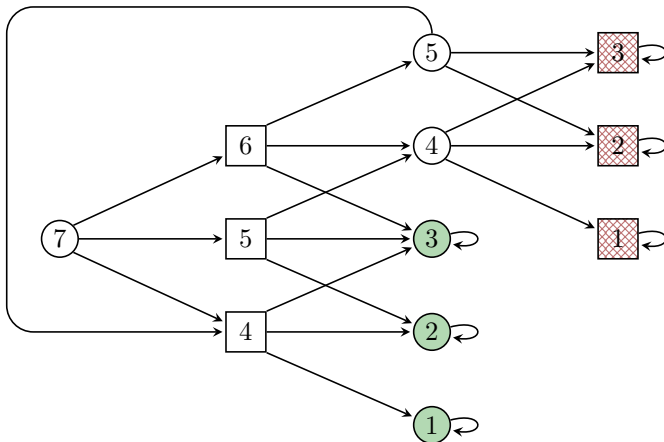


Jeu de Nim – Stratégie



Exercice VI.10. Est-ce que la stratégie d'Ève lui garantit de gagner depuis 7 ?

Jeu de Nim – Exercice



Exercice VI.11. Existe-t-il une stratégie pour Ève qui lui garantit de gagner depuis 7 ?

Le problème

Définition VI.12 (Région gagnante d'Ève). Soit un jeu d'accessibilité $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$. La **région gagnante d'Ève** W_E est l'ensemble des sommets de l'arène à partir desquels Ève a une stratégie gagnante, *i. e.*,

$$W_E = \{v \in V \mid \exists \sigma_E, \forall \sigma_A : \pi_{(\sigma_E, \sigma_A)} \text{ depuis } v \text{ est gagnante pour Ève}\}.$$

Le problème. Soit un jeu d'accessibilité $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$. Quelle est la région gagnante d'Ève ? Quelle est la région gagnante d'Adam ?

Définition VI.13 (Région gagnante d'Adam). Soit un jeu d'accessibilité $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$. La **région gagnante d'Adam** W_A est l'ensemble des sommets de l'arène à partir desquels Ève n'a pas de stratégie gagnante, *i. e.*,

$$W_A = \{v \in V \mid \forall \sigma_E, \exists \sigma_A : \pi_{(\sigma_E, \sigma_A)} \text{ depuis } v \text{ est gagnante pour Adam}\}.$$

Lemme VI.14. Soit un jeu d'accessibilité \mathbb{J} . La région gagnante d'Ève W_E et celle d'Adam W_A forment une partition de l'ensemble des sommets V , *i. e.*, $W_E \cup W_A = V$ et $W_E \cap W_A = \emptyset$.

Attracteur – Idée

Quelques observations :

- ▶ Dans chaque sommet v de V_E , on veut choisir un arc qui nous rapproche de T_E .
- ▶ Si on a un successeur v' de v depuis lequel on sait qu'on peut atteindre T_E , alors on peut aussi atteindre T_E depuis v : $\sigma_E(v) = v'$.
- ▶ Adam peut parfois nous empêcher de nous rapprocher de T_E , mais pas toujours : si on sait qu'on peut atteindre T_E depuis chacun des successeurs d'un sommet de V_A , alors Adam ne pourra pas nous bloquer depuis ce sommet.

On cherche les sommets qui sont dans l'**attracteur** de T_E .

Attracteur – Définition formelle

Définition VI.15 (Attracteur). Soient $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$ un jeu d'accessibilité et $X \subseteq V$. L'ensemble des **prédécesseurs contrôlables** d'Ève pour X est

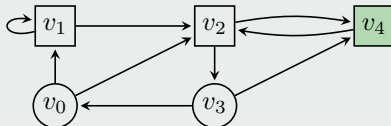
$$\text{CPre}_E(X) = \{u \in V_E \mid \exists (u, v) \in E : v \in X\} \cup \{u \in V_A \mid \forall (u, v) \in E : v \in X\}.$$

On définit $\text{Attr}_E^1(T_E) = T_E$ et, pour tout $k \geq 2$,

$$\text{Attr}_E^k(T_E) = \text{Attr}_E^{k-1}(T_E) \cup \text{CPre}_E(\text{Attr}_E^{k-1}(T_E)).$$

L'**attracteur** est $\text{Attr}_E^\infty(T_E)$.

Exercice VI.16. Calculez les 6 premières itérations de l'attracteur pour $\{v_4\}$ sur l'arène suivante.



Attracteur – Résultats

Lemme VI.17. Pour n'importe quel jeu d'accessibilité $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$, il existe un $n \geq 1$ tel que $\text{Attr}_E^n(T_E) = \text{Attr}_E^{n+1}(T_E)$.

Ébauche de preuve. Soit $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$. Prenons $n = |V|$.

Dans le pire des cas, on ajoute un sommet par itération. Vu que l'arène est finie, il y a forcément un moment où on ne peut plus rajouter. Donc, $\text{Attr}_E^n(T_E) = \text{Attr}_E^{n+1}(T_E)$. □

Attracteur – Résultats

Lemme VI.17. Pour n'importe quel jeu d'accessibilité $\mathbb{J} = (\mathcal{A}, T_E)$, il existe un $n \geq 1$ tel que $\text{Attr}_E^n(T_E) = \text{Attr}_E^{n+1}(T_E)$.

Ébauche de preuve. Soit $\mathcal{A} = (V, E, V_E, V_A)$. Prenons $n = |V|$.

Dans le pire des cas, on ajoute un sommet par itération. Vu que l'arène est finie, il y a forcément un moment où on ne peut plus rajouter. Donc, $\text{Attr}_E^n(T_E) = \text{Attr}_E^{n+1}(T_E)$. □

On peut calculer l'attracteur en un nombre fini d'itérations.

Attracteur – Algorithme

```
1 : procédure ATTRACTEUR( $\mathcal{G} = (V, E), V_E, V_A, T_E$ )
2 :    $W^0 \leftarrow \emptyset$ 
3 :    $W^1 \leftarrow T_E$ 
4 :    $i = 1$ 
5 :   tant que  $W^i \neq W^{i-1}$  faire
6 :      $W^{i+1} \leftarrow W^i$ 
7 :     pour chaque  $v \in V$  faire
8 :       si  $v \in V_E$  et il existe un successeur  $v'$  de  $v$  tel que  $v' \in W^i$  alors
9 :          $W^{i+1} \leftarrow W^{i+1} \cup \{v\}$ 
10 :      sinon si  $v \in V_A$  et, pour tout successeur  $v'$  de  $v$ ,  $v' \in W^i$  alors
11 :         $W^{i+1} \leftarrow W^{i+1} \cup \{v\}$ 
12 :       $i \leftarrow i + 1$ 
13 :   retourner  $W^i$ 
```

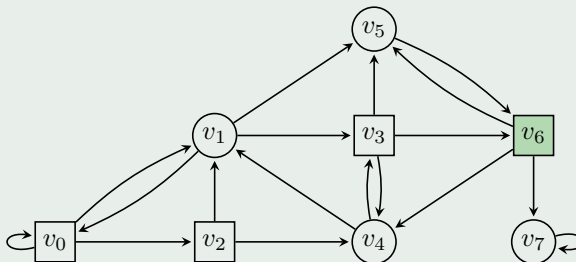
▷ Si on est dans T_E , alors on a gagné.

▷ Ève peut choisir d'aller en v' .

▷ Adam ne peut pas bloquer Ève.

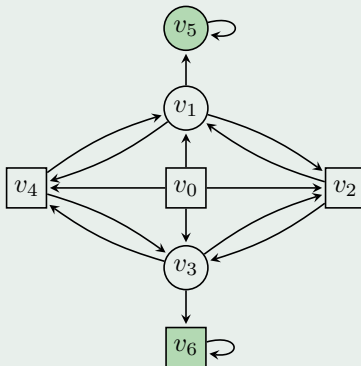
Exercices

Exercice VI.18. Donnez tous les sommets de ce graphe depuis lesquels Ève peut gagner.



Exercices

Exercice VI.19. Donnez tous les sommets de ce graphe depuis lesquels Ève peut gagner.



Stratégie depuis l'attracteur

Question VI.20. Comment récupérer une stratégie pour Ève depuis les itérations de l'attracteur ?

Stratégie depuis l'attracteur

Question VI.20. Comment récupérer une stratégie pour Ève depuis les itérations de l'attracteur ?

Supposons que v est ajouté dans la région gagnante à l'itération i :

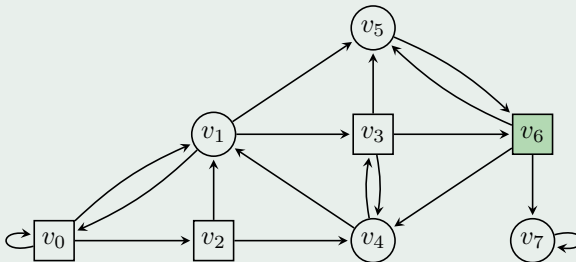
- ▶ Si $v \in V_E$, alors il existe un successeur u de v tel que u était **déjà présent dans la région gagnante à l'itération $i - 1$** . Donc, on peut choisir d'aller en u depuis v et on **progresses**.
- ▶ Si $v \in V_A$, on n'a rien à faire : la stratégie ne concerne que les sommets d'Ève.

Algorithme de l'attracteur avec stratégie

```
1 : procédure ATTRACTEURSTRATÉGIE( $\mathcal{G} = (V, E), V_E, V_A, T_E$ )
2 :    $W^0 \leftarrow \emptyset$ 
3 :    $W^1 \leftarrow T_E$  ▷ Si on est dans  $T_E$ , alors on a gagné.
4 :    $\sigma_E \leftarrow$  une stratégie quelconque pour Ève
5 :    $i = 1$ 
6 :   tant que  $W^i \neq W^{i-1}$  faire
7 :      $W^{i+1} \leftarrow W^i$ 
8 :     pour chaque  $v \in V$  faire
9 :       si  $v \in V_E \setminus W^i$  et il existe un successeur  $v'$  de  $v$  tel que  $v' \in W^i$  alors
10 :         $W^{i+1} \leftarrow W^{i+1} \cup \{v\}$ 
11 :         $\sigma_E(v) \leftarrow v'$  ▷ Ève peut choisir d'aller en  $v'$ .
12 :      sinon si  $v \in V_A \setminus W^i$  et, pour tout successeur  $v'$  de  $v$ ,  $v' \in W^i$  alors
13 :         $W^{i+1} \leftarrow W^{i+1} \cup \{v\}$  ▷ Adam ne peut pas bloquer Ève.
14 :       $i \leftarrow i + 1$ 
15 :   retourner  $(W^i, \sigma_E)$ 
```


Exercices

Exercice VI.21. Donnez une stratégie pour Ève qui lui permet de gagner depuis les sommets de sa région gagnante.



Exercice VI.22. Comment calculer une stratégie pour Adam ?

Une implémentation naïve de l'algorithme de l'attracteur est en $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$.

Lemme VI.23. On peut implémenter l'algorithme en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Une implémentation naïve de l'algorithme de l'attracteur est en $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$.

Lemme VI.23. On peut implémenter l'algorithme en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Dans le TP d'aujourd'hui :

- ▶ Implémentation d'une arène et d'un jeu d'accessibilité.
- ▶ Implémentation de l'algorithme de l'attracteur en temps linéaire.